

弾性平板の大たわみ問題の FEM 解析

堀辺 忠志*

富田 玄隆** 大高 理秀**

1. まえがき

近年,各種の機械構造物の軽量化に伴い,かなり薄い板厚の板が各所で用いられるようになってきた。このような薄板が変形する場合には,いわゆる大たわみ変形状態となり,単純な線形理論では変形の状態を正しく捉えることはできない。強度設計の観点から,このような板の大たわみ状態での変形の様子を捉えることは工学上重要に思われる。

本研究は,4辺が完全に固定された長方形板の中央に1個の集中荷重が作用した場合の変形の様子を有限要素法解析プログラム COSMOS/M を用いて解析し,それらの結果について報告する。

2. 問題の設定

図1のように縦横の長さが $a \times b$,厚さが h の長方形板を考える。集中荷重が板の中央に作用し,4辺全部が完全に固定されているものとする。

このような板の変形を大たわみ理論に従って解析する。

大たわみ理論とは,板の x, y 方向ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ およびせん断ひずみ γ_{xy} を

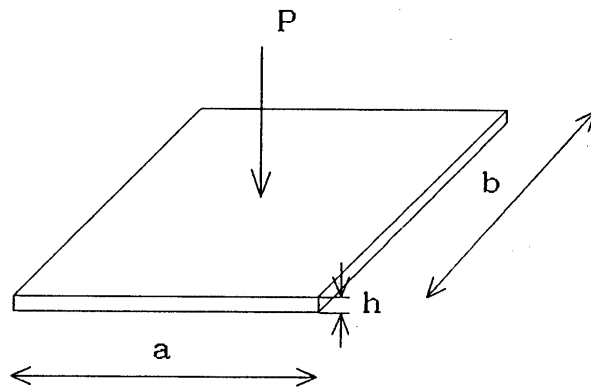


図1 中央集中荷重を受ける長方形板

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

のように仮定して板の変形を扱う理論である。この大たわみ理論では,曲げ変形と面内変形とが互いに影響を及ぼし合って外力と変位とは比例関係を持たない。

通常,(1)式のようなひずみを仮定し,有限要素法によって解析すると,節点変位に関する連立非線形連立1次方程式が得られる。そしてこの連立1次方程式を逐次近似法で解くことによって解を得ることができる。

*茨城工業高等専門学校機械工学科 **新技術応用部

これらの一連の手順は、COSMOS/Mの機能のなかに用意されており、プリ・トランスレータを用いてある程度の入力データを自動的に作成することができるようになっている。

板は、弾性体であるものとし、材質はアルミニウム、ヤング率 $=6800\text{kgf/mm}^2$ ポアソン比 $\nu=0.3$ とする。また板の寸法は、厚さ $h=1\text{mm}$ 、 $a=200\text{mm}$ 、 $b=200\text{mm}$ と $a=200\text{mm}$ 、 $b=400\text{mm}$ の2種類を対象を考える。

この板を細かい要素に分割する場合には図2のように板の $1/4$ 音K分のみを考えた。

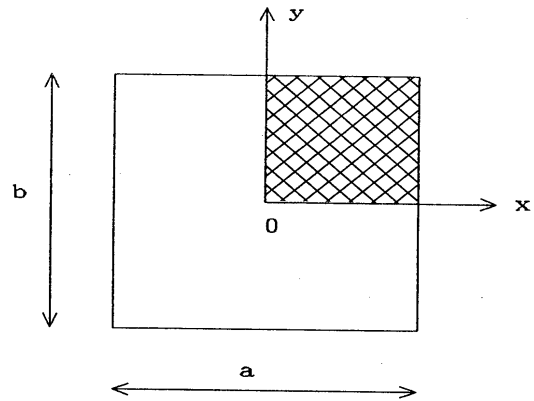


図2 要素分割領域

3. 有限要素法による計算結果

3.1 線形解析

2章で定義したアスペクト比 b/a が1と2のアルミニウム板について大たわみ解析した結果について述べる。なお、使用した要素は3角形シェル要素(COSMOS/MではSHELL3D要素と呼ばれている)である。これは、1要素あたりの節点数が3、自由度が18自由度の要素であり、面内変形と面外変形との両方の変形に対応できる要素である。もちろん、この要素はシェル(殻)の変形解析にも利用できる。

はじめに、この3角形要素がどの程度の解析精度を有しているかをチェックするために線形解析を行った。

図1のような4辺を固定した板に中央集中荷重を負荷したときの中央点のたわみは

$$w = \alpha \frac{P a^2}{D}, D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \alpha = 0.00560 \text{ (} b/a=1 \text{)} \quad \alpha = 0.00722 \text{ (} b/a=2 \text{)} \quad (2)$$

で表される。

図1の板を図3-1、図3-2のような4種類の要素分割を行い、有限要素線形解析で得られた中央のたわみと式(2)の値とを比較したのが次の表1と表2である。なお中央での荷重の大きさは 1kgf とした。

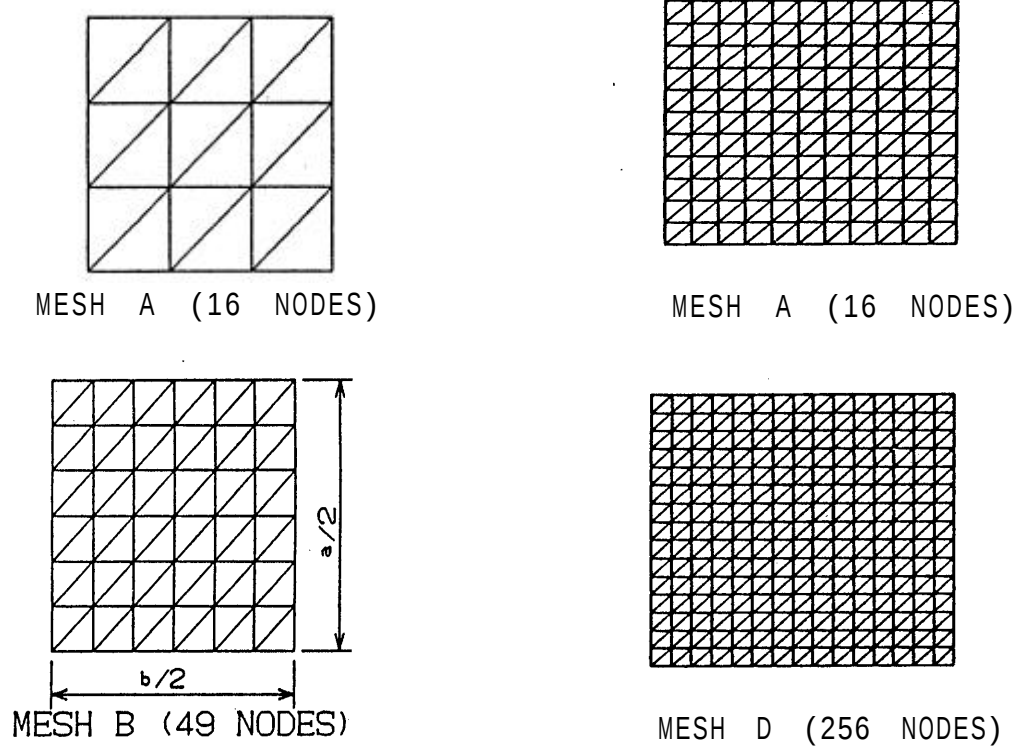


図 3-1 要素分割($b/a=1$)

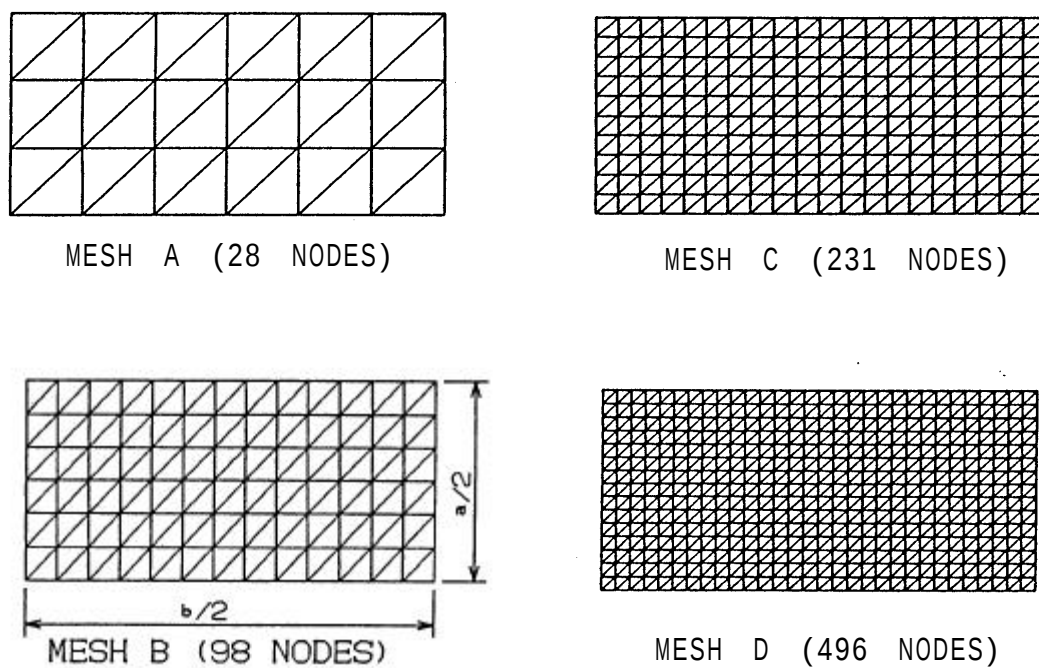


図 3-2 要素分割($b/a=2$)

表1 中央でのたわみ値の比較(b/a=1)

	MESH A (16 NODES)	MESH B (49 NODES)	MESH C (121 NODES)	MESH D (256 NODES)
F. E. M.	0.3702	0.3636	0.3617	0.3611
%error	2.91	1.08	0.551	0.384

(%error=(F. E. M. -EXACT)/EXACT*100, EXACT=0.3597 mm)

表2 中央でのたわみ値の比較(b/a=2)

	MESH A (28 NODES)	MESH B (98 NODES)	MESH C (231 NODES)	MESH D (496 NODES)
F. E. M.	0.4718	0.4666	0.4654	0.4649
%error	1.73	0.608	0.350	0.242

(%error=(F. E. M. -EXACT)/EXACT*100, EXACT=0.4638 mm)

この表1, 2より, SHELL3D要素の計算精度の目安をある程度捉えることができる。b/a=1,2ともにMESH B程度でも十分な解析精度を持っているといえよう。なお,非線形解析では,計算精度を十分にするためb/a=1, 2ともにMESH Dの要素分割を採用した。

3.2 大たわみ解析

3.1節での結果をもとに,中央集中荷重を受ける4辺固定板の大たわみ解析を行った。

図4, 5はそれらの有限要素解析結果である。横軸は集中荷重(P)を無次元化して表示した荷重 Pa^2D/h ,縦軸は中央の変位を板厚hで無次元化したたわみ W_{max}/h である。図4, 5はそれぞれb/a=1, b/a=2のときの図である。図には,線形理論の関係も破線で示してある。

図中のCOARSEは要素分割図のMESH A, FINEはMESH Dに対応している。両者の差はそれほどっていない。また,図4, 5ともに,変形が進行するにつれて板がたわみにくくなっているいわゆるハードスプリングの様子を表している。

図6は, a/b=1の場合について,有限要素解析結果(MESH D)とa=200mm, h=2mmの正方形アルミニウム板を用いた実物実験結果とを比較したものである。両者は良い一致を示していて,有限要素解析結果の妥当性を裏付けているものと考えられる。

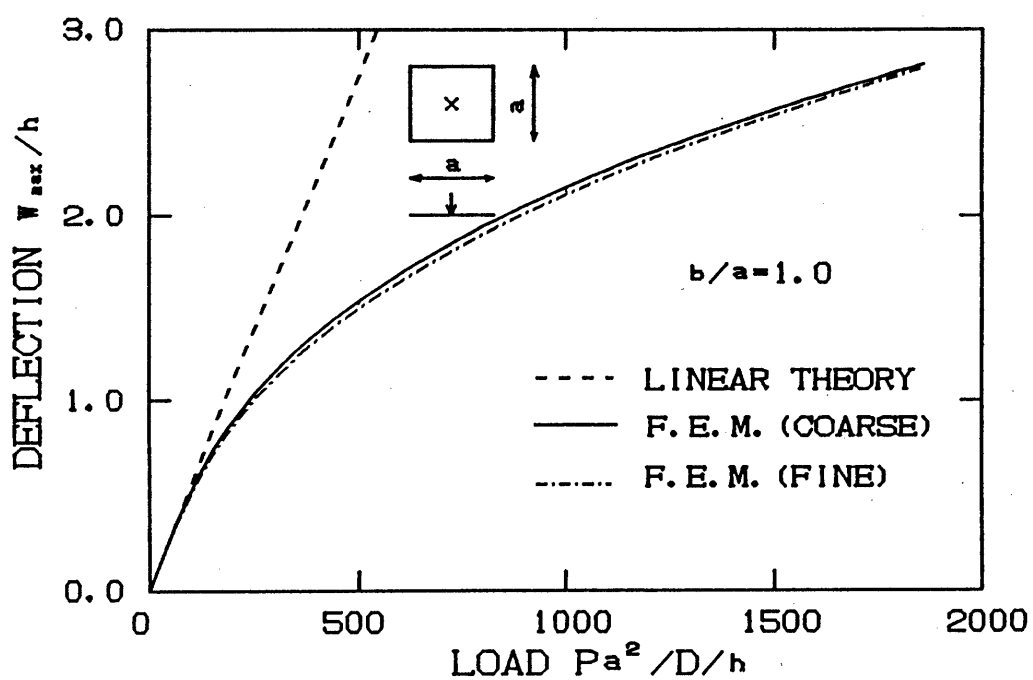


図4 たわみと荷重の関係($b/a=1$)

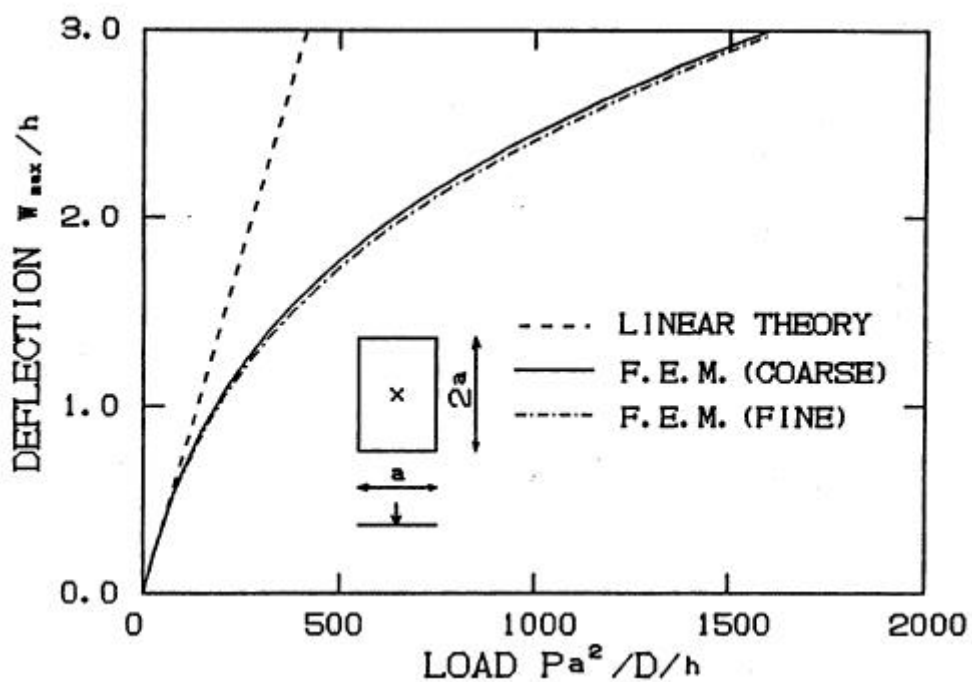


図5 たわみと荷重の関係($b/a=2$)

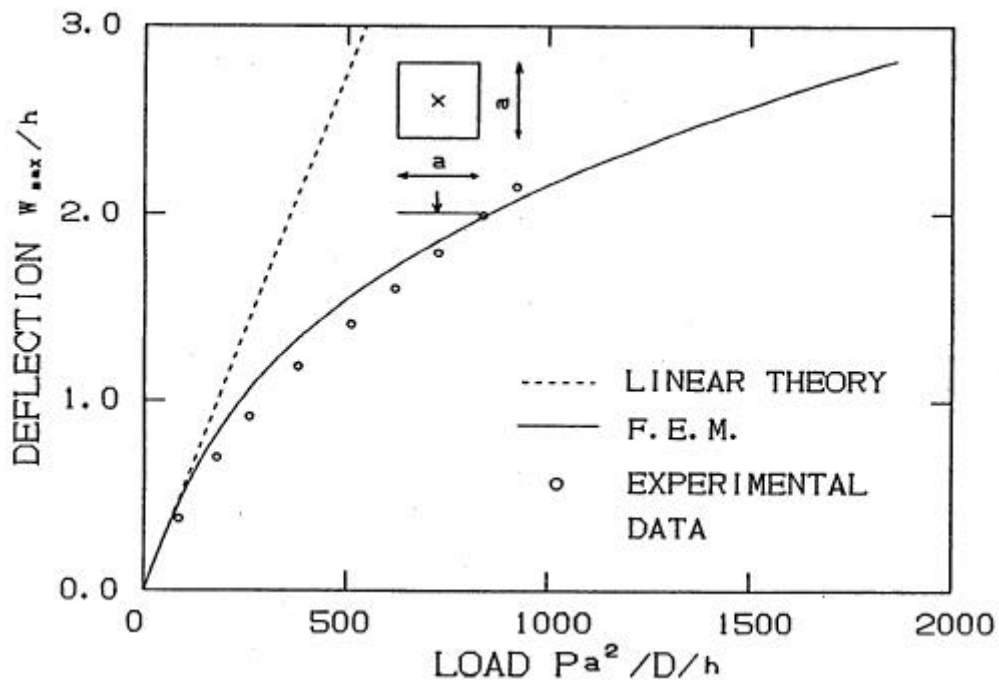


図6 有限要素解析結果と実験結果との比較

3.3 最小2乗法による荷重—変位関係の表現式

図4, 5の無次元たわみ W_{max}/h と無次元荷重 $Pa^2/D/h$ との関係を, 最小2乗法を用いて利用しやすい式に表現することを考える。

いま, たわみ W_{max}/h を x , 荷重 $Pa^2/D/h$ を y とし, 有限要素法で得られた x, y の値(適当な間隔で18組抽出した)に対して

$$y = ax + bx^3 + cx^5$$

の近似式を考える。

$b/a=1$ の場合のデータに関し, 最小2乗法を適用すると次のように定数 a, b, c を決定することができる。

$$a = 1.95065E+02 \quad b = 5.68006E+01 \quad c = 1.25372E+00$$

すなわち

$$y = 1.95065 \times 10^2 x + 5.68006 \times 10^1 x^3 + 1.25372 x^5 \quad (3)$$

となる。

有限要素法(FEM)の解析データに対する式(3)の適用限界を調べるために、式(3)の結果と解析データとの差を%で表したものが次の表である。

ここで、DIFFERENCE は

$$DIFFERENCE = \frac{\text{無次元荷重 } y_i - \text{式(3)の } y}{\text{無次元荷重 } y_i} \times 100$$

である。

表3 最小2乗法の解析結果への適用(b/a=1)

無次元たわみ x (FEM結果)	無次元荷重 y (FEM結果)	式(3)の y	DIFFERENCE(%)
3.43820E-01	6.42340E+01	6.93820E+01	-8.01439E+00
6.21470E-01	1.28471E+02	1.34977E+02	-5.06429E+00
8.38680E-01	1.92706E+02	1.97625E+02	-2.55264E+00
1.01600E+00	2.56941E+02	2.59115E+02	-8.45935E-01
1.16590E+00	3.21176E+02	3.20147E+02	3.20345E-01
1.29690E+00	3.85410E+02	3.81480E+02	1.01961E+00
1.41370E+00	4.49647E+02	4.43325E+02	1.40610E+00
1.61630E+00	5.78118E+02	5.68952E+02	1.58544E+00
1.79000E+00	7.06588E+02	6.97977E+02	1.21869E+00
1.94310E+00	8.35059E+02	8.30474E+02	5.49109E-01
2.08090E+00	9.63529E+02	9.66636E+02	-3.22435E-01
2.20680E+00	1.09200E+03	1.10653E+03	-1.33020E+00
2.32300E+00	1.22047E+03	1.24998E+03	-2.41790E+00
2.43120E+00	1.34894E+03	1.39697E+03	-3.56026E+00
2.48270E+00	1.47741E+03	1.47176E+03	3.82700E-01
2.53270E+00	1.60588E+03	1.54749E+03	3.63623E+00
2.62840E+00	1.73435E+03	1.70139E+03	1.90086E+00
2.71910E+00	1.86282E+03	1.85865E+03	2.23922E-01
2.80540E+00	1.99129E+03	2.01921E+03	-1.40192E+00

これより、xの小さい範囲では差がやや大きい、式(3)はたわみと荷重の関係を実用上十分に表しているものといえる。

b/a=2の場合に関しても同様に

$$a = 1.17787E+02 \quad b = 5.63050E+01 \quad c = -9.95234E-01$$

すなわち

$$y = 1.17787 \times 10^2 x + 5.6305 \times 10^1 x^3 - 9.95234 \times 10^{-1} x^5 \quad (5)$$

となり、次のようなデータと近似式の差の表を得ることができる。

表4 最小2乗法の解析結果への適用($b/a=2$)

無次元たわみ x (FEM結果)	無次元荷重 y (FEM結果)	式(4)の y	DIFFERENCE(%)
4.32280E-01	6.42340E+01	5.54502E+01	1.36747E+01
7.57200E-01	1.28471E+02	1.13385E+02	1.17427E+01
1.00160E+00	1.92706E+02	1.73548E+02	9.94152E+00
1.36430E+00	2.56941E+02	2.98973E+02	-1.63588E+01
1.50880E+00	3.21176E+02	3.63329E+02	-1.31246E+01
1.63770E+00	4.49647E+02	4.28490E+02	4.70518E+00
1.86150E+00	5.78118E+02	5.60207E+02	3.09807E+00
2.05350E+00	7.06588E+02	6.93098E+02	1.90912E+00
2.22300E+00	8.35059E+02	8.26349E+02	1.04300E+00
2.37570E+00	9.63529E+02	9.59468E+02	4.21431E-01
2.51530E+00	1.09200E+03	1.09209E+03	-7.91445E-03
2.64420E+00	1.22047E+03	1.22376E+03	-2.69291E-01
2.76430E+00	1.34894E+03	1.35429E+03	-3.96624E-01
2.87700E+00	1.47741E+03	1.48352E+03	-4.13238E-01
2.98330E+00	1.60588E+03	1.61120E+03	-3.31066E-01
3.08410E+00	1.73435E+03	1.73728E+03	-1.68675E-01
3.18000E+00	1.86282E+03	1.86155E+03	6.83934E-02
3.27160E+00	1.99129E+03	1.98398E+03	3.67352E-01

これも式(3)と同様な傾向を示している。

4. 結 論

有限要素解析システム COSMOS/M を用いて、中央集中荷重を受ける4辺固定弾性板の大たわみ解析を行った。その結果、平板の荷重と変位の非線形関係を精度良く調べることができた。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill (1957)
- 2) C.Y.Chia, Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill (1984).
- 3) M.A.Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.1, John Wiley & Sons (1990).